



ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 1º semestre, EN prova 2ª parte matéria 10. 01. 20  
1 hora. (10 valores – 60% da nota final)

Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Espaço reservado para classificações

1a.(10)	2.(15)	3a.(10)	4.(10)	6.(5)
1b.(15)		3b.(10)	5.(10)	7.(15)

Atenção: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. Seja  $(X, Y)$  uma variável aleatória bidimensional com função densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{4} (x + y) \quad (0 < x < 1; 0 < y < 2x)$$

- a. Obtenha as funções densidade marginais de  $X$  e  $Y$ .  
b. Calcule  $P(X > 1/2, Y > 1)$  e calcule também  $E(Y|X = x)$ .
2. Uma companhia aérea voa com aviões de pequenas dimensões, que **podem acomodar até oito passageiros**. A companhia aérea determinou que a probabilidade de um passageiro com bilhete não comparecer para um voo é de 0.2 e é independente da decisão dos restantes passageiros. Para cada voo, a empresa vende bilhetes aos primeiros 10 compradores correndo o risco de *overbooking*. Seja  $X$  a variável que representa número de passageiros com bilhete que não comparecem a determinado voo e  $Y$  o número de bilhetes vendidos. A função probabilidade de  $Y$  é dada por:

$y$	6	7	8	9	10	outros
$f_Y(y)$	0.25	0.35	0.25	0.10	0.05	0

Qual a probabilidade de se registar uma situação de *overbooking*, isto é, de comparecerem mais pessoas para embarcar do que existem lugares no avião?

3. Clientes chegam a um balcão de atendimento seguindo um processo de Poisson com taxa média de 7 por hora.
- a. Qual a probabilidade de se atenderem 10 ou mais clientes em 2 horas?  
b. Sabendo que se atenderam 10 clientes nas 2 horas qual a probabilidade de exatamente 3 deles terem sido atendidos na 1ª hora?
4. O número de pessoas que diariamente ocorre a determinado serviço pode ser bem modelado por uma variável aleatória de média 10 e variância 9. Se considerarmos que as chegadas em dias diferentes são independentes qual a probabilidade (eventualmente aproximada) para que o número total de pessoas a acorrem ao serviço nos próximos 120 dias seja superior a 1250?
5. Admita que os custos de produção de determinado artigo são bem modelados por uma variável aleatória  $X$  com distribuição  $G(3.5; 0.5)$ . Qual a probabilidade dos custos ultrapassarem 9 euros?
6. De uma população normal de média 10 e variância 16 vai-se recolher uma amostra de dimensão 25. Qual a probabilidade de a média da amostra ser superior a 12?

7. Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição normal de média 1 e variância 4 e seja  $Y$  outra variável aleatória, independente de  $X$ , com distribuição também ela normal mas de média 2 e variância 1. Calcule  $P\left(\frac{X-1}{|Y-2|} > 6.156\right)$

### Solução

1. Seja  $(X, Y)$  uma variável aleatória bidimensional com função densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = (3/4)(x + y) \quad (0 < x < 1; 0 < y < 2x)$$

- a. Obtenha as funções densidade marginais de  $X$  e  $Y$ .

$$f_X(x) = \int_0^{2x} \left(\frac{3}{4}\right)(x + y) dy = \left(\frac{3}{4}\right)(xy + y^2/2)_0^{2x} = 3x^2 \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_{y/2}^1 \left(\frac{3}{4}\right)(x + y) dx = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)_{y/2}^1 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} + y - 5y^2/8\right) \quad 0 < y < 2$$

- b. Calcule  $P(X > 1/2, Y > 1)$  e calcule também  $E(Y|X = x)$ .

$$\begin{aligned} P(X > 1/2, Y > 1) &= \int_{1/2}^1 \int_1^{2x} \frac{3}{4}(x + y) dy dx = \frac{3}{4} \int_{1/2}^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^{2x} dx = \frac{3}{4} \int_{1/2}^1 4x^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{3}{4} \int_{1/2}^1 4x^2 - x - \frac{1}{2} dx = \frac{3}{4} \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_{1/2}^1 = \frac{3}{4} \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{24} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right)\right] \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{24}\right) = \frac{3}{4} * \frac{13}{24} = \frac{13}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y|X = x) &= \int_0^{2x} y * \frac{\frac{3}{4}(x + y)}{3x^2} dy = \frac{1}{4} \int_0^{2x} y * \frac{x + y}{x^2} dy = \frac{1}{4} \int_0^{2x} \frac{xy + y^2}{x^2} dy \\ &= \frac{1}{4} * \frac{1}{x^2} \int_0^{2x} xy + y^2 dy = \frac{1}{4x^2} \left[x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^{2x} = \frac{1}{4x^2} \left(2x^3 + \frac{8x^3}{3}\right) \\ &= \frac{7x}{6} \quad 0 < x < 1, x \text{ fixo} \end{aligned}$$

2. Uma companhia aérea voa com aviões de pequenas dimensões, que **podem acomodar até oito passageiros**. A companhia aérea determinou que a probabilidade de um passageiro com bilhete não comparecer para um voo é de 0.2 e é independente da decisão dos restantes passageiros. Para cada voo, a empresa vende bilhetes aos primeiros 10 compradores correndo o risco de *overbooking*. Seja  $X$  a variável que representa número de passageiros com bilhete que não comparecem a determinado voo e  $Y$  o número de bilhetes vendidos. A função probabilidade de  $Y$  é dada por:

$y$	6	7	8	9	10	outros
$f_Y(y)$	0.25	0.35	0.25	0.10	0.05	0

Qual a probabilidade de se registar uma situação de *overbooking*, isto é, de comparecerem mais pessoas para embarcar do que existem lugares no avião?

Existirá uma situação de *overbooking* se  $Y = 9$  e  $X = 0$ ,  $Y = 10$  e  $X = 0$  e  $Y = 10$  e  $X = 1$   
 $X|Y = y \sim B(y, 0.2)$

$$\begin{aligned}
P(\text{overbooking}) &= P(X=0, Y=9) + P(X=0, Y=10) + P(X=1, Y=10) \\
&= P(X=0|Y=9) \times P(Y=9) + P(X=0|Y=10) \times P(Y=10) + P(X=1|Y=10) \times P(Y=10) \\
&= 0.1342 \times 0.10 + 0.1074 \times 0.05 + 0.2684 \times 0.05 \\
&= 0.03221
\end{aligned}$$

3. Clientes chegam a um balcão de atendimento seguindo um processo de Poisson com taxa média de 7 por hora.

a. Qual a probabilidade de se atenderem 10 ou mais clientes em 2 horas?

$Y$  - nº clientes atendidos em 2 horas tendo  $Y \sim Po(2 * 7)$

$$P(Y \geq 10) = 1 - P(Y < 10) = 1 - F_Y(9) = 1 - 0.1094 = 0.8906$$

b. Sabendo que se atenderam 10 clientes nas 2 horas qual a probabilidade de exatamente 3 deles terem sido atendidos na 1ª hora?

Seja  $X_1$  o número de clientes atendidos na 1ª hora e  $X_2$  o número de clientes atendidos na 2ª hora.  
 $X_1 \sim Po(7)$ ,  $X_2 \sim Po(7)$  e  $X_1, X_2$  independentes porque dizem respeito a períodos de tempo disjuntos.

$$\begin{aligned}
P(X_1=3 | X_1 + X_2 = 10) &= \frac{P(X_1=3, X_1 + X_2 = 10)}{P(X_1 + X_2 = 10)} = \frac{P(X_1=3, X_2=7)}{P(Y=10)} = \frac{P(X_1=3) \times P(X_2=7)}{P(Y=10)} \\
&= \frac{0.0521 \times 0.1490}{0.0663} = 0.1171
\end{aligned}$$

4. O número de pessoas que diariamente acorre a determinado serviço pode ser bem modelado por uma variável aleatória de média 10 e variância 9. Se considerarmos que as chegadas em dias diferentes são independentes qual a probabilidade (eventualmente aproximada) para que o número total de pessoas a acorrem ao serviço nos próximos 120 dias seja superior a 1250?

$X_i$  - Nº de pessoas que acorrem ao serviço no dia  $i$ . Sucessão de v.a. i.i.d. com  $E(X_i) = \mu = 10$  e  $\text{var}(X_i) = \sigma^2 = 9$

Sendo a distribuição de  $X_i$  desconhecida, aplica-se o TLC com correção de continuidade já que  $X$  é v.a.

discreta (trata-se de uma contagem). Assim  $Z = \frac{\sum_{i=1}^{120} X_i - 120\mu}{\sigma \sqrt{120}} \sim n(0,1)$

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{120} X_i > 1250\right) &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{120} X_i \leq 1250\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1250.5 - 120 \times 10}{3\sqrt{120}}\right) \\
&= 1 - \Phi(1.5366) \approx 1 - 0.9382 = 0.0618
\end{aligned}$$

5. Admita que os custos de produção de determinado artigo são bem modelados por uma variável aleatória  $X$  com distribuição  $G(3.5; 0.5)$ . Qual a probabilidade dos custos ultrapassarem 9 euros?

$$X \sim G(3.5; 0.5) \Leftrightarrow X \sim \chi_{(7)}^2 \text{ então } P(X > 9) \approx 0.25$$

6. De uma população normal de média 10 e variância 16 vai-se recolher uma amostra de dimensão 25. Qual a probabilidade de a média da amostra ser superior a 15?

$$X \sim n(10; 16) \text{ logo } \bar{X} \sim n\left(10; \frac{16}{25}\right) \text{ isto é } Z = \frac{\bar{X} - 10}{4/5} \sim n(0,1)$$

$$P(\bar{X} > 12) = 1 - \Phi\left(\frac{12 - 10}{4/5}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{10}{4}\right) = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

7. Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição normal de média 1 e variância 4 e seja  $Y$  outra variável aleatória, independente de  $X$ , com distribuição também ela normal mas de média 2 e variância 1. Calcule  $P\left(\frac{X-1}{|Y-2|} > 6.156\right)$

$$X \sim n(1;4) \text{ logo } \frac{X-1}{2} \sim n(0;1).$$

De forma semelhante  $Y \sim n(2;1)$  logo  $\frac{Y-2}{1} = (Y-2) \sim n(0;1)$  e portanto  $(Y-2)^2 \sim \chi_{(1)}^2$

$$\text{Assim } T = \frac{\frac{X-1}{2}}{\sqrt{(Y-2)^2/1}} \sim t_{(1)}. \text{ Simplificando } T = \frac{X-1}{2|Y-2|} \sim t_{(1)}$$

$$\text{Assim, } P\left(\frac{X-1}{|Y-2|} > 6.156\right) = P(2T > 6.256) = P\left(T > \frac{6.156}{2}\right) = P(T > 3.078) = 0.1$$